Microeconomia I - Elementos de Matemática

Paulo Victor da Fonseca

02 de março de 2023

⚠ Estas notas de aula servem apenas para sistematizar minha exposição, não tendo qualquer pretensão de originalidade. As proposições e demonstrações que aparecem aqui são retiradas da bibliografia citada no programa da disciplina

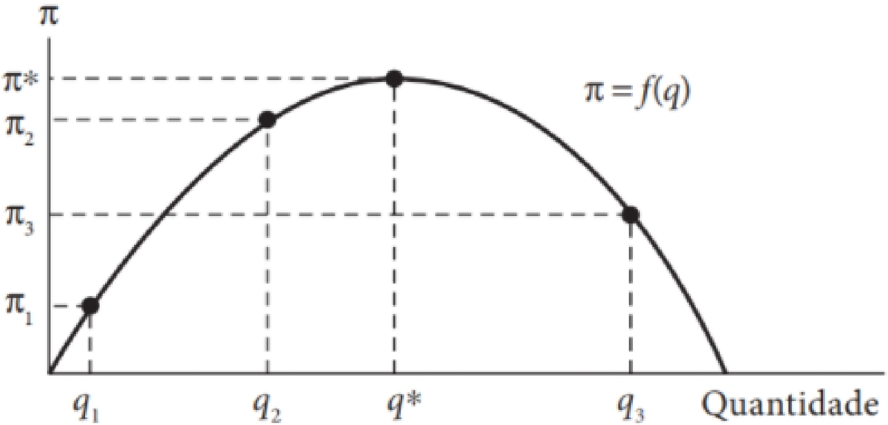
Leitura sugerida: Nicholson e Snyder (2019) - Capítulo 2 (seções 2.1 a 2.6)

Motivação

- Suponha que uma firma deseje maximizar lucros obtidos com a venda de um determinado bem
- Suponha, ainda, que os lucros recebidos, π, dependem apenas da quantidade vendida, q, deste bem:

$$\pi = f(q). \tag{1}$$

Motivação



FUNÇÃO LUCRO HIPOTÉTICA. Fonte: Nicholson e Snyder (2019).

Motivação

- Pontos q_1 e q_2 - lucros obtidos variam positivamente com a quantidade produzida:

$$\frac{\Delta\pi}{\Delta q} > 0.$$

- Contanto que $\Delta\pi/\Delta q > 0$, a firma continuará aumentando produção
- Para pontos à direita de q^*, como q_3, $\Delta\pi/\Delta q < 0$ e, portanto, o gerente notará que um erro foi cometido
- Inspeção visual da figura sugere que lucros serão maximizados no ponto q^*.

Derivadas

- Um tópico importante em muitas disciplinas científicas, incluindo economia, é o estudo de quão rápido quantidades mudam ao longo do tempo
- Para calcular a posição futura de um planeta, prever o crescimento populacional de uma espécie biológica, ou estimar a demanda futura de uma determinada *commodity*, precisamos de informações acerca das taxas de variação
- O conceito usado para descrever a taxa de variação de uma função é o de derivada

Derivadas

- Dada uma função custo total $C = f(Q)$, o custo marginal é definido como a variação no custo total, C, resultante de uma pequena variação (infinitesimal) na quantidade produzida, Q
- O custo marginal pode ser medido pela inclinação da da reta tangente à curva de custo total, que nada mais é que o limite da razão $\Delta C/\Delta Q$ quando ΔQ tende a zero
- Assim, o conceito de inclinação da reta tangente a uma curva é a contrapartida geométrica do conceito de derivada

Derivadas

Uma função f é diferenciável no ponto a se:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

existe.

Neste caso, este limite é denotado por $f'(a)$ e é chamado de derivada de f no ponto a:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

A função f é diferenciável se f for diferenciável em todos os pontos de seu domínio.

Derivadas

- Na função lucro hipotética que vimos anteriormente, temos:

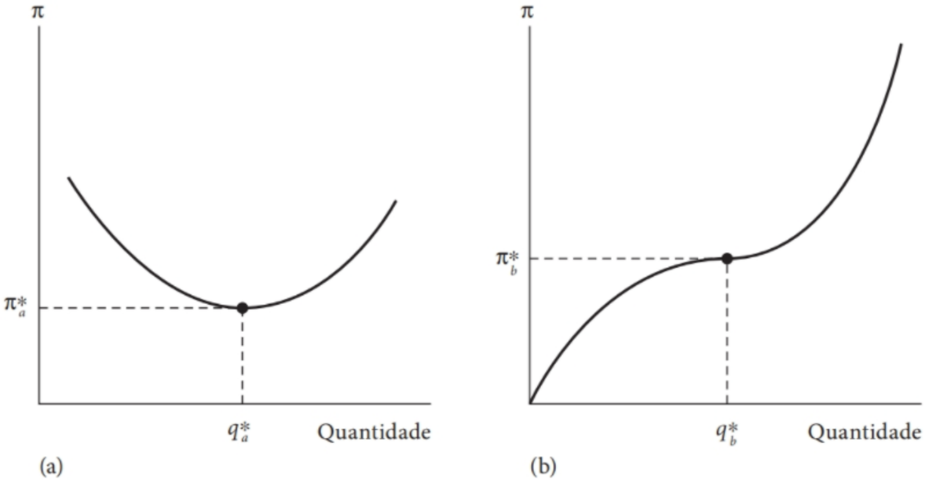
$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q_1} &> 0, \\
\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q_3} &< 0.
\end{aligned}
$$

Condição de primeira ordem

- Qual o valor de $d\pi/dq$ avaliada no ponto q^*?
- À esquerda de q^* a derivada da função lucro é positiva, enquanto à direita, é negativa
- No ponto q^*, $f'(q^*) = 0$
- Este resultado é geral, para uma função contínua e diferenciável f univariada atingir seu valor máximo (mínimo) em um determinado ponto, a derivada da função avaliada neste ponto **deve** ser igual a zero:

$$\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q^*} = \left.\frac{df}{dq}\right|_{q=q^*} = 0$$

Condições de segunda ordem



FUNÇÃO LUCRO - CPOs E CSOs. Fonte: Nicholson e Snyder (2019).

Condições de segunda ordem

- As figuras anteriores evidenciam que $d\pi/dq = 0$ é uma condição necessária mas não suficiente para assegurar um ponto de máximo
- Para assegurar que o ponto crítico seja, de fato, um máximo (mínimo) relativo, uma segunda condição deve ser imposta
- Intuitivamente, os lucros obtidos com a produção de uma quantidade um pouco maior ou um pouco menor que q^* devem ser menores que os lucros associados a q^*
- Matematicamente, se $q < q^*$ devemos ter $d\pi/dq > 0$, e se $q > q^*$ esta derivada deve ser negativa
- Ou seja, no ponto q^*, $d\pi/dq$ deve ser decrescente (negativa)

Segundas derivadas e CSOs

- A derivada de uma derivada é chamada de segunda derivada (ou derivada de segunda ordem) e é denotada por:

$$\frac{d^2\pi}{dq^2}, \quad f''(q).$$

- Portanto, a condição adicional para que q^* seja um ponto de máximo local é dada por:

$$\left.\frac{d^2\pi}{dq^2}\right|_{q=q^*} = f''(q^*) < 0.$$

Regras de derivação

- Função constante. $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$.
- Dada qualquer constante a, $f(x) = x^a \Rightarrow f'(x) = ax^{a-1}$
- Se f e g são funções diferenciáveis, então, $f \pm g$ também é diferenciável e:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

- Se f e g são diferenciáveis, então, $f \cdot g$ também é diferenciável e:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Se f e g são diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$, então, f/g também é diferenciável em x e:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Regras de derivação

- Regra da cadeia. Se g é diferenciável em x e f é diferenciável em $g(x)$, então, $f \circ g$ é diferenciável em x e:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

  Alternativamente, se $y = f(x)$ e $x = g(z)$, então:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz} = \frac{df}{dx}\frac{dg}{dz}$$

- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Exercícios

1. Encontre as derivadas das seguintes funções:
   1.1 $f(x) = (2 - x^2)^3$
   1.2 $f(x) = (x^3 + x^2)^{50}$
   1.3 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
   1.4 $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$
2. Encontre a primeira e segunda derivadas das seguintes funções:
   2.1 $y = x^3 + e^x$
   2.2 $y = \frac{e^x}{x}$
   2.3 $y = x^2 \ln x$

Exercício: maximização de lucros

Suponha que a função lucro de uma firma maximizadora de lucros seja dada por:

$$\pi(q) = 1000q - 5q^2.$$

Encontre o valor de q que maximize a função lucro e o valor de lucro máximo.

Funções multivariadas

- Uma função com n variáveis é uma regra que associa um número $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ a uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais.
- Exemplo: Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas modelaram o crescimento da economia dos EUA de 1899-1922. Consideraram um modelo no qual a produção é determinada pela quantidade de trabalho utilizada e de capital investido:

$$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

- A estimativa obtida por MQO foi dada por:

$$F(K, L) = 1,01K^{0,25}L^{0,75}$$

Derivadas parciais

- Para a função $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, nosso interesse é o ponto em que y atinge seu valor máximo e nos trade-offs que devem ser feitos para alcançar este ponto

- Funções de n variáveis: ideia de uma derivada não é bem definida (a inclinação de uma função depende da direção em que é tomada)

- Usualmente, as inclinações direcionais de interesse são apenas aquelas obtidas quando variamos um dos argumentos mantendo os demais constantes

- Estas inclinações direcionais são chamadas derivadas parciais e denotamos por:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{x_i}, \quad f_i$$

Derivadas parciais

- Formalmente, a derivada parcial de f com relação a x_1 é:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h), \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n - f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}{h}$$

- A derivada parcial de uma derivada parcial é chamada derivada parcial de segunda ordem:

$$\frac{\partial(\partial f/\partial x_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$$

- Teorema de Young (Teorema Clairaut-Schwarz) $f_{ij} = f_{ji}$

1. $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$
2. $f(x_1, x_2) = e^{ax_1+bx_2}$
3. $f(x_1, x_2) = a\ln x_1 + b\ln x_2$

Derivadas parciais

- Uma derivada parcial de segunda ordem com relação a um mesmo argumento negativa é uma maneira matemática de representar o princípio de rendimentos marginais decrescentes

- De maneira similar, uma derivada parcial cruzada f_{ij} indica como a efetividade marginal de x_i muda quando x_j aumenta - sinal deste efeito pode ser negativo ou positivo

- De maneira mais geral, derivadas parciais de segunda ordem contêm informações a respeito da curvatura de uma função

- A curvatura de uma função é fundamental para determinarmos se um ponto crítico é um ponto de mínimo, máximo (ou nenhum dos casos) em um problema de otimização

Regra da cadeia

- Suponha que y seja uma função cujo domínio seja um subconjunto do $\mathbb{R}^3$: $y = f(x_1, x_2, x_3)$
- Suponha, ainda, que cada um dos argumentos de f seja função de um único parâmetro a, i.e., $y = f(x_1(a), x_2(a), x_3(a))$
- Temos:

$$\frac{dy}{da} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{da} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{da} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dx_3}{da}$$

Funções implícitas

- Se o valor de uma função é mantido constante, cria-se uma relação implícita entre as variáveis independentes
- I.e., as variáveis independentes não podem assumir valores quaisquer
- Uma das aplicações desta ideia é a quantificação de trade-offs, inerentes a quase todos os modelos econômicos
- Aqui, consideraremos o caso mais simples: $\bar{y} = f(x_1, x_2)$

Funções implícitas

- Sob condições relativamente gerais (principalmente $f_2 \neq 0$), manter y constante permite a definição de uma função implícita da forma $x_2 = g(x_1)$. Temos, então:

$$\bar{y} = f(x_1, x_2) = f(x_1, g(x_1))$$

- Regra da cadeia e diferenciação com relação a x_1 implicam:

$$0 = f_1 + f_2 \frac{dg(x_1)}{dx_1}$$

- Portanto:

$$\frac{dg(x_1)}{dx_1} = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_2}$$

Funções implícitas: exemplo

- Considere uma economia descrita por uma fronteira de possibilidades de produção para os bens x e y descrita por:
$$x^2 + 0,25y^2 = 200$$
- Se $x = 10$ e $y = 20$, quanto da produção do bem y esta economia deve sacrificar para produzir uma unidade adicional de x?

Otimização irrestrita: funções multivariadas

- O uso de derivadas parciais possibilita a determinação do valor máximo (mínimo) de uma função multivariada
- Para isso, o uso do conceito de diferencial é importante
- Para uma função univariada, se f é contínua e diferenciável, denotaremos uma variação arbitrária em x por dx
- Neste caso, a expressão $f'(x)dx$ é chamado o diferencial de $y = f(x)$ e é denotada por dy, de modeo que:

$$dy = f'(x)dx$$

- Ou seja, dy é proporcional a dx, com $f'(x)$ como fator de proporcionalidade

Otimização irrestrita: funções multivariadas

- Como visto anteriormente, a condição necessária para um máximo (mínimo) relativo é dada por $dy = 0$ para pequenas variações em x ao redor do ponto ótimo

- Portanto, a condição necessária de primeira ordem implica que:

$$f'(x) = 0$$

- Estas ideias podem ser aplicadas para o caso de funções multivariadas

Otimização irrestrita: funções multivariadas

- Seja $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ contínua e diferenciável

- Poderíamos considerar variar apenas um dos valores das variáveis independentes x_i, enquanto mantemos os outros valores constantes

- O valor do impacto desta variação sobre a variável dependente y seria dado por:

$$dy = f_i dx_i$$

- Para que um ponto específico seja um máximo (mínimo) local de f, nenhum movimento infinitesimal em qualquer direção pode aumentar o valor desta função

- Dito de outra forma, todos os termos direcionais similares nesta equação não podem aumentar o valor de y

Otimização irrestrita: funções multivariadas

- A única forma para que isso aconteça é que todas as derivadas parciais sejam nulas
- Formalmente, a condição necessária de primeira ordem para um máximo (mínimo) local é que, neste ponto, tenhamos:

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$$

- Um ponto que satisfaça essas condições simultaneamente é chamado ponto crítico
- Não é, necessariamente, um ponto de máximo (mínimo) relativo a não ser que as condições de segunda ordem sejam satisfeitas
- Interpretação econômica das CPOs: para que uma função atinja seu valor máximo, é necessário que cada argumento da função cresça até o ponto em que seu valor marginal para a função objetivo seja igual a zero

Otimização irrestrita: funções multivariadas

Encontre o(s) ponto(s) crítico(s) para a seguinte função de duas variáveis reais:

$$y = f(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10$$

Otimização com restrições de igualdade

⚠ Até agora: valores máximos de uma função sem restringir escolhas dos argumentos - otimização irrestrita

- Para a maioria dos problemas econômicos, nem todos os valores que os argumentos de uma função podem assumir são factíveis

- E.g.: restrição de não-negatividade, restrições por considerações econômicas (restrição orçamentária)

- Estas restrições podem reduzir o valor máximo da nossa função objetivo. Como não podemos escolher os valores dos argumentos livremente, y pode não ser tão elevado quanto seria no problema irrestrito

Otimização com restrições de igualdade

- Método de solução para problema de otimização com restrições de igualdade: método dos multiplicadores de Lagrange

- No problema irrestrito, tínhamos um sistema de n equações com n incógnitas ($f_i = 0, \quad \forall i \in 1, ... n$)

- No problema restrito temos, pelo menos, uma equação adicional (a restrição), mas nenhuma variável adicional

- O método dos multiplicadores de Lagrande introduz uma variável adicional (multiplicador de Lagrange) que possibilita a resolução do problema de otimização ($n + 1$ equações simultâneas em $n + 1$ incógnitas)

- Além disso, veremos durante o curso que esta variável adicional tem uma interpretação econômica útil

Otimização com restrições de igualdade

- Formulação do problema:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,\ldots,x_n} \quad & y = f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{s.r.} \quad & g(x_1, \ldots, x_n) = c \end{aligned}$$

  onde g representa a relação que deve ser válida entre os valores das variáveis x (restrição)

- O primeiro passo é definir a função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda[c - g(x_1, \ldots, x_n)],$$

  onde λ é a variável adicional - multiplicador de Lagrange

Otimização com restrições de igualdade

- Condições necessárias de primeira ordem:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= f_1 + \lambda g_1 = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= f_2 + \lambda g_2 = 0, \\
\vdots \quad &\vdots \quad \ddots \vdots \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} &= f_n + \lambda g_n = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= c - g(x_1, \ldots, x_n) = 0.
\end{aligned}
$$

Otimização com restrições de igualdade: dualidade

- Problemas de maximização com restrições possuem um problema dual de minimização condicionada que foca a atenção nas restrições do problema original (primal)
- Teoria do consumidor: problema primal. Maximização da função utilidade condicionado à restrição orçamentária
- Problema dual: minimização dos gastos necessários para atingir um nível dado de utilidade

Otimização com restrições de igualdade

- Suponha que um fazendeiro possui uma cerca de comprimento P e deseja cercar a maior área retangular possível

- Qual o formato de área que este fazendeiro deve escolher?

- Se o perímetro da área cercada é igual a 400, qual será o comprimento e a largura do terreno cercado?

- Suponha, agora, que este fazendeiro deseja cercar o terreno de forma a minimizar a quantidade de cerca utilizada para contornar um terreno de área igual a $10.000m^2$. Qual será o perímetro de área cercada neste caso?

Bibliografia

- NICHOLSON, W.; SNYDER C. *Teoria microeconômica: Princípios básicos e aplicações*. Cengage Learning Brasil, 2019. Disponível em: app.minhabiblioteca.com.br/books/9788522127030