UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências da Administração e Socioeconômicas
Departamento de Ciências Econômicas

Disciplina: Métodos Quantitativos em Economia I
Docente: Paulo Victor da Fonseca
Contato: paulo.fonseca@udesc.br
Página da disciplina: Métodos Quantitativos I

O texto que segue não tem a menor pretensão de originalidade. Ele serve apenas como registro dos principais princípios, conceitos e técnicas analíticas que são trabalhados em sala de aula.

1 Estática comparativa

Modelos econômicos possuem dois tipos de variávies: variávies endógenas, cujos valores são explicados pelo próprio modelo, e variáveis exógenas, cujos valores são tomados como dados (de fora do modelo).

Os valores de solução que obtemos para as variáveis endógenas irão, tipicamente, depender dos valores das variáveis exógenas e uma parte central da análise econômica é, frequentemente, mostrar como os valores da solução das variáveis endógenas variam quando as variáveis exógenas são alteradas - estática comparativa.

Exemplos: Modelo Keynesiano simples de determinação da renda agregada; modelo de mercado linear; impostos sobre produto em um monopólio.
Na lousa.

A análise de estática comparativa que acabamos de ver é típica em economia. Usamos as relações básicas do modelo para derivar uma equação fundamental contendo apenas a variável endógena que buscamos a solução, a variável exógena e os parâmetros do modelo. O próximo passo é encontrar uma equação para a variável endógena em função da variável exógena.

A questão que buscamos responder em um exercício de estática comparativa é: qual o efeito que uma variação em uma variável exógena tem sobre a variável endógena do modelo? Estamos interessados nos sinais algébricos destas expressões pois eles nos dão uma informação qualitativa sobre a direção da variação no valor de equilíbrio seguindo uma mudança na variável exógena. Esse efeito pode ser analisado graficamente, no entanto, a abordagem algébrica nos permite determinar a força e direção dos efeitos de estática comparativa dados os parâmetros do modelo.

1.1 Análise de estática comparativa generalizada

1.1.1 Uma variável endógena e uma variável exógena

Vamos supor que temos um modelo econômico para o qual a solução de equilíbrio é dada por uma equação da forma:

$$f(x^*, \alpha) = 0, \tag{1}$$

onde x^* é o valor de equilíbrio da variável endógena. E assume-se que f é uma função diferenciável.

O procedimento para análise de estática comparativa é como segue: assuma que é possível resolver a equação (1) para x^* como uma função diferenciável de α (veremos brevemente as condições sob as quais é possível fazer isso), e escreva a solução como $x^*(\alpha)$. Portanto, temos:

$$f(x^*(\alpha), \alpha) = 0. \tag{2}$$

Então, diferencie esta função com relação a α para obter:

$$f_x \frac{dx^*}{d\alpha} + f_\alpha = 0. \tag{3}$$

Então, resolvendo esta equação sob a hipótese de que $f_x \neq 0$, obtemos:

$$\frac{dx^*}{d\alpha} = -\frac{f_\alpha(x^*, \alpha)}{f_x(x^*, \alpha)}. \tag{4}$$

Exercício: Considere a função implícita $f(x^*(\alpha), \alpha) = \ln x^* - 2\alpha^2 = 0$. Encontre o valor de $dx^*/d\alpha$.

Aplicação econômica: efeito de uma variação da renda no mercado de um bem

Suponha que a função de demanda de mercado para um bem é $D(p, y)$, onde p é o preço e y a renda agregada do consumidor. A função de oferta de mercado é $S(p)$. Então, o valor de equilíbrio do preço p^* é dada pela condição:

$$D(p^*, y) - S(p^*) = 0,$$

onde $D - S$ é o excesso de demanda.

Portanto, temos a solução:

$$\frac{dp^*}{dy} = -\frac{D_y}{D_p - S_p}.$$

Suponha que $D_p < 0$ (o bem não é de Giffen) e $S_p > 0$. Então, o efeito de um aumento da renda sobre o preço de equilíbrio depende se o bem é normal ($D_y > 0$) ou inferior ($D_y \leq 0$). Se $D_p > 0$ (bem de Giffen), o bem é, necessariamente, inferior ($D_y \leq 0$) e, portanto, o efeito de um aumento da renda sobre o preço vai depender do sinal de $D_p - S_p$.

1.1.2 Estática comparativa com várias variáveis endógenas e exógenas

Considere, inicialmente, o caso de duas variáveis de cada tipo. Como veremos, isso requer um equilíbrio ou condição de primeira ordem - uma função f - para cada variável endógena. Portanto, a solução será dada pelas condições:

$$\begin{aligned} f^1(x_1^*, x_2^*, \alpha_1, \alpha_2) &= 0, \\ f^2(x_1^*, x_2^*, \alpha_1, \alpha_2) &= 0. \end{aligned}$$

Agora, as soluções de equilíbrio das variáveis endógenas dependem de ambas variáveis exógenas. Queremos derivar e determinar os sinais, se possível, das quatro derivadas existentes.

Assuma que seja possível resolver essas equações para x_1^* e x_2^* como funções diferenciáveis de α_1 e α_2. Então:

$$\begin{aligned} f^1(x_1^*(\alpha_1, \alpha_2), x_2^*(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2) &= 0, \\ f^2(x_1^*(\alpha_1, \alpha_2), x_2^*(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2) &= 0. \end{aligned}$$

Diferenciando com relação a α_1, obtemos:

$$\begin{aligned} f_1^1 \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + f_2^1 \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} + f_{\alpha_1}^1 &= 0, \\ f_1^2 \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + f_2^2 \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} + f_{\alpha_1}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^*/\partial \alpha_1 \\ \partial x_2^*/\partial \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{\alpha_1}^1 \\ -f_{\alpha_1}^2 \end{bmatrix}$$

Para resolver esse sistema linear, é necessário que a seguinte condição para o determinante seja satisfeita:

$$|D| = f_1^1 f_2^2 - f_2^1 f_1^2 \neq 0.$$

Assumindo esta condição e usando a regra de Cramer, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} &= \frac{\begin{vmatrix} -f^1_{\alpha_1} & f^1_2 \\ -f^2_{\alpha_1} & f^2_2 \end{vmatrix}}{|D|} = \frac{-(f^1_{\alpha_1} f^2_2 - f^2_{\alpha_1} f^1_2)}{|D|}, \\
\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} &= \frac{\begin{vmatrix} f^1_1 & -f^1_{\alpha_1} \\ f^2_1 & -f^2_{\alpha_1} \end{vmatrix}}{|D|} = \frac{-(f^2_{\alpha_1} f^1_1 - f^1_{\alpha_1} f^2_1)}{|D|}.
\end{aligned}
$$

Para determinar os sinais algébricos destas derivadas, precisamos saber o sinal de todas as derivadas parciais envolvidas. Além disso, os numeradores e denominadores envolvem diferenças entre dois termos e, portanto, precisamos saber ou assumir algo a respeito das magnitudes destes termos para definir os sinais das soluções.

Aplicação econômica: Modelo IS-LM (Na lousa).

1.1.3 Método geral de estática comparativa

Definição 1 *Método generalizado de estática comparativa*

Dado que o sistema de n equações:

$$
\begin{aligned}
f^1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0 \\
f^2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0 \\
\vdots \quad &\ddots \quad \vdots \\
f^n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0
\end{aligned}
$$

possa ser resolvido para os valores de equilíbrio das n variáveis endógenas $x_1^*, \dots, x_n^*$ como funções diferenciáveis das m variáveis exógenas $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, temos que:

$$
\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{ij}|}{|F|}, \qquad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m,
$$

onde $|F| \neq 0$ é o determinante:

$$
|F| = \begin{vmatrix} f^1_1 & f^1_2 & \dots & f^1_n \\ f^2_1 & f^2_2 & \dots & f^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^n_1 & f^n_2 & \dots & f^n_n \end{vmatrix},
$$

e $|F_{ij}|$ é obtido ao substituírmos a i-ésima coluna de $|F|$ pela j-ésima coluna da matriz $n \times m$:

$$\begin{bmatrix} -f^1_{\alpha_1} & -f^1_{\alpha_2} & \dots & -f^1_{\alpha_m} \\ -f^2_{\alpha_1} & -f^2_{\alpha_2} & \dots & -f^2_{\alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f^n_{\alpha_1} & -f^n_{\alpha_2} & \dots & -f^n_{\alpha_m} \end{bmatrix}.$$

Note que:

- Devemos assumir que $|F| \neq 0$.
- As derivadas parciais são avaliadas no ponto de equilíbrio inicial e, portanto, são valores reais dados.
- Quando o sistema de equações representa as CPOs de um problema de maximização ou minimização, as CSOs para este problema determinarão o sinal de $|F|$, dado que são o determinante da Hessiana orlada na análise de condições de segunda ordem (veremos mais adiante na disciplina).

Até agora assumimos que o sistema de equações da Definição 1 resultam em soluções para as n variáveis endógenas como funções diferenciáveis das m variáveis exógenas. O teorema que determina as condições sob as quais isso pode ser assumido é, então, enunciado.

Teorema 1 (Teorema da Função Implícita) *Dado um sistema de equações:*

$$\begin{aligned} f^1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0 \\ f^2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0 \\ \vdots \quad \ddots \quad &\vdots \\ f^n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0, \end{aligned}$$

seja $(x_1^*, \dots, x_n^*; \alpha_1^0, \dots, \alpha_m^0)$ um ponto que satisfaça essas equações, e que as funções possuam derivadas parciais contínuas até uma ordem r, sobre algum conjunto aberto de pontos no $\mathbb{R}^{n+m}$ ao redor de $(x_1^*, \dots, x_n^*; \alpha_1^0, \dots, \alpha_m^0)$. Se o determinante do Jacobiano:

$$|F| = \begin{vmatrix} f^1_1 & f^1_2 & \dots & f^1_n \\ f^2_1 & f^2_2 & \dots & f^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^n_1 & f^n_2 & \dots & f^n_n \end{vmatrix} \neq 0,$$

onde $f_i^k \equiv \partial f^k/\partial x_i$*, e essas derivadas são avaliadas em* $(x_1^*, \ldots, x_n^*; \alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0)$*, então, o sistema de equações define* $x_1, \ldots, x_n$ *como funções dos* α_j*'s em alguma vizinhança do ponto* $(x_1^*, \ldots, x_n^*; \alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0)$*. Nesta vizinhança, temos:*

$$\begin{bmatrix} f_1^1 & f_2^1 & \ldots & f_n^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & \ldots & f_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^n & f_2^n & \ldots & f_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^*/\partial \alpha_j \\ \partial x_2^*/\partial \alpha_j \\ \vdots \\ \partial x_n^*/\partial \alpha_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{\alpha_j}^1 \\ -f_{\alpha_j}^2 \\ \vdots \\ -f_{\alpha_j}^n \end{bmatrix},$$

para cada $j = 1, \ldots, m$*.*

2 Teorema do envelope

Em análises de estática comparativa em contextos de problemas de otimização com restrição, é comum usarmos uma abordagem baseada no teorema do envelope - em adição ou substituição ao teorema da função implícita.

Considere o seguinte problema de otimização com restrição:

$$\begin{array}{ll} \max_{x_1, x_2} & f(x_1, x_2; \alpha) \\ \text{s.r.} & g(x_1, x_2; \alpha) = 0, \end{array}$$

onde α é uma variável exógena. A função Lagrangeana para este problema é:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda; \alpha) = f(x_1, x_2; \alpha) + \lambda g(x_1, x_2; \alpha),$$

e as CPOs associadas:

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, x_2^*; \alpha) + \lambda^* g_1(x_1^*, x_2^*; \alpha) &= 0, \\ f_2(x_1^*, x_2^*; \alpha) + \lambda^* g_2(x_1^*, x_2^*; \alpha) &= 0, \\ g(x_1^*, x_2^*; \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Se as funções f e g possuem primeira e segunda derivadas contínuas e, além disso:

$$|D| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & f_{11} + \lambda^* g_{11} & f_{12} + \lambda^* g_{12} \\ g_2 & f_{21} + \lambda^* g_{21} & f_{22} + \lambda^* g_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

então, podemos aplicar o teorema da função implícita. Isto quer dizer que podemos obter as soluções para as variáveis endógenas como funções da variável exógena em uma vizinhança do ponto ótimo, de forma que o valor da função f nessa mesma vizinhança é:

$$f(x_1(\alpha), x_2(\alpha); \alpha) \equiv V(\alpha),$$

e V é uma função valor para o problema de maximização.

Da mesma forma, podemos escrever a função Lagrangeana como função do parâmetro:

$$\mathcal{L} = f(x_1(\alpha), x_2(\alpha); \alpha) + \lambda(\alpha) g(x_1(\alpha), x_2(\alpha); \alpha).$$

Temos, então, que:

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} = (f_1 + \lambda g_1)\frac{dx_1}{d\alpha} + (f_2 + \lambda g_2)\frac{dx_2}{d\alpha} + g\frac{d\lambda}{d\alpha} + (f_\alpha + \lambda g_\alpha),$$

que quando avaliada no ponto ótimo nos dá o seguinte resultado:

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} = f_\alpha + \lambda^* g_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha},$$

ou seja, mesmo que mudanças no valor de α induzam variações nos valores das variáveis endógenas, para pequenas mudanças no **ponto ótimo**, os efeitos dessas alterações na função Lagrangeana podem ser ignoradas pois as derivadas parciais da função Lagrangeana com relação às variáveis endógenas são nulas neste ponto.

O teorema do envelope estabelece uma conexão entre as derivadas da função valor e as derivadas da função Lagrangeana, com relação a α, no ponto ótimo. Portanto, para a função valor, temos:

$$\frac{dV}{d\alpha} = f_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + f_2 \frac{dx_2}{d\alpha} + f_\alpha,$$

pelas CPOs, temos:

$$\frac{dV}{d\alpha} = -\lambda^* \left(g_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + g_2 \frac{dx_2}{d\alpha} \right) + f_\alpha$$

no ponto ótimo.

A restrição do problema pode ser escrita como:

$$g(x_1(\alpha), x_2(\alpha); \alpha) = 0,$$

onde, como x_i são as soluções ótimas e, portanto, satisfazem a restrição, esta expressão é satisfeita com igualdade. Portanto:

$$g_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + g_2 \frac{dx_2}{d\alpha} = -g_\alpha.$$

Portanto, para este exemplo, o teorema do envelope nos diz que:

$$\frac{dV}{d\alpha} = f_\alpha + \lambda^* g_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}. \tag{5}$$

O teorema do envelope diz que podemos encontrar o efeito de uma variação na variável exógena sobre o valor ótimo da função objetivo simplesmente tomando a derivada parcial da função Lagrangeana com relação à variável exógena avaliada na solução ótima do problema.

Teorema 2 (Teorema do Envelope) *Dado o problema:*

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m), \qquad (6)\\ s.r. \quad & g^1(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \\ & \ddots \\ & g^K(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \end{aligned}$$

e a função valor correspondente $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$*, e a função Lagrangeana* $\mathcal{L} = f + \sum \lambda_k g^k$*, temos que:*

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_j} = f_{\alpha_j} + \sum_{k=1}^{K} \lambda_j g^k_{\alpha_j}, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Referências

[1] CHIANG, A.C.; WAINWRIGHT, K. Matemática para economistas. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

[2] HOY, M.; LIVERNOIS, J.; McKENNA, C.; REES, R.; STENGOS, T. Mathematics for Economics. 3rd.ed. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2011.

[3] SILBERBERG, E.; SUEN, W. The structure of economics: a mathematical analysis. 3rd.ed. Singapore: McGraw-Hill Higher Education, 2001.

[4] SYDSÆTER, K.; HAMMOND, P.J.; STRØM, A.; CARVAJAL, A. Essential mathematics for economic analysis. 5th.ed. Harlow, UK: Pearson Education Limited, 2016.