Funções homogêneas e funções homotéticas

Paulo Victor da Fonseca

Sumário

Introdução

- Para estudarmos de maneira eficiente a estrutura de muitos dos modelos econômicos é necessário compreendermos uma importante classe de funções conhecida como funções homogêneas.
- O interesse nessas funções emergiu de um problema na teoria econômica da distribuição.
- O desenvolvimento da teoria da produtividade marginal por Alfred Marshall (revolução marginalista e escola neoclássica), entre outros, levou à conclusão de que os fatores de produção seriam remunerados de acordo com seus produtos marginais.
- Dito de outra forma, os fatores seriam empregados até o ponto em que sua contribuição para à produção da firma seja exatamente igual ao custo de aquisição de unidades adicionais deste fator.

Introdução

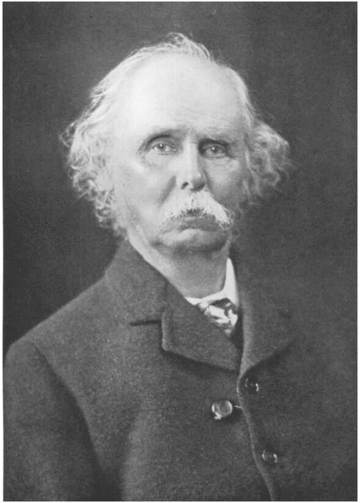

Figura Alfred Marshall (1842-1924). Fonte: Wikipedia.

Introdução

- Seja $y = f(x_1, x_2)$ a função de produção de uma firma.
- Além disso, w_i denota a remuneração do fator x_i e p o preço do produto desta firma, a regra desenvolvida é, portanto:
$$pPMg_i = pf_i = w_i, \qquad f_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$
- No entanto, esta análise foi desenvolvida em um arcabouço de equilíbrio parcial. I.e., cada fator era analisado de forma independente.
- Uma questão naturalmente emerge: como é possível assegurar que a firma é capaz de fazer estes pagamentos para ambos fatores?
- Todas as remunerações dos fatores devem derivar da produção da firma.
- Seria produzido uma quantidade suficiente (ou haveria uma superprodução?) para remunerar cada fator pelo seu produto marginal?

Introdução

- Um teorema desenvolvido pelo matemático suíço Euler ajudou a resolver este problema.
- Veremos que se a função de produção exibe retornos constantes de escala, a soma da remuneração total de fatores será idêntica à produção total da firma.

Introdução

- Economistas normalmente trabalham com funções que possuem algumas propriedades fortes tais como homogeneidade ou convexidade.
- Em algumas vezes, essas propriedades emergem naturalmente para funções específicas.
- Por exemplo, funções de demanda são naturalmente homogêneas nos preços e na renda.
- Outras, no entanto, os economistas impõe estas propriedades como hipóteses para demonstrar teoremas sobre modelos econômicos.
- Por exemplo, conseguimos derivar bem mais resultados para modelos econômicos quando as utilidades são funções homotéticas ou quando as funções lucro são côncavas do que conseguiríamos sem estas hipóteses.

Funções homogêneas

- Considere as seguintes funções:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+y^2, \\ g(x,y) &= \frac{xy}{x+y}, \\ h(x,y) &= x^2 y \ln \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

- Cada uma dessas funções apresenta uma propriedade interessante de que, se as variáveis x, y forem multiplicadas por um parâmetro t qualquer, então, nós obtemos a função original multiplicada por uma potência de t.

- Funções que apresentam essa propriedade são chamadas funções homogêneas.

Funções homogêneas

- Funções homogêneas emergem naturalmente em várias áreas da economia.
- Funções lucro e funções custo, que são derivadas das funções de produção, e funções de demanda, que são derivadas de funções utilidade, são automaticamente homogêneas nos modelos econômicos convencionais.

Funções homogêneas

Definição (Funções homogêneas)

Para qualquer escalar k, uma função de valores reais $f(x_1, \ldots, x_n)$ é homogênea de grau k se:

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

para todos os valores de $x_1, \ldots, x_n$ e t para os quais as funções $f(x_1, \ldots, x_n)$ e $f(tx_1, \ldots, tx_n)$ estão definidas.

Funções homogêneas

- O grau k em nossa definição é uma constante. Não precisa, necessariamente, ser um número inteiro. Além disso, pode ser um número negativo ou igual a zero.

- Se nossa relação fundamental (1) é válida apenas para valores de t restritos ao ortante positivo, $\mathbb{R}^n_{++}$ (ou não-negativo), dizemos que f é **positivamente homogênea de grau** k.

- Como em economia normalmente trabalharemos com funções homogêneas definidas no ortante positivo ($t > 0$), por conveniência utilizaremos apenas o termo "função homogênea de grau k".

Exemplos

1. $\frac{x}{x^2+y^2}$ é homogênea de grau -1.
2. $x^{1/3} + xy^{-2/3}$ é homogênea de grau $1/3$.
3. $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ é homogênea de grau 0.

Funções de produção

- Em economia, normalmente é conveniente trabalhar com funções de produção que sejam funções homogêneas.
- Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ uma função de produção homogênea de grau k, temos que:

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n).$$

- Se $k = 1$, dizemos que a firma apresenta **retornos constantes de escala**.
- Se $k > 1$, dizemos que a firma apresenta **retornos crescentes de escala**.
- Se $k < 1$, dizemos que a firma apresenta **retornos decrescentes de escala**.

Funções de produção

- Uma forma funcional específica de função homogênea que frequentemente é utilizada em economia é a função de produção do tipo Cobb-Douglas:

$$q = Ax_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}, \qquad A, a_1, \dots, a_n > 0.$$

- A função de produção do tipo Cobb-Douglas é homogênea de grau $k = a_1 + \cdots + a_n$.
- Portanto, a função de produção Cobb-Douglas exibirá retornos decrescentes, constantes ou crescentes de escala a depender da soma de seus expoentes.

Funções de produção

- Desde a publicação do trabalho do matemático Charles Cobb e do economista Paul Douglas nos anos 1920, economistas interessados em estimar funções de produção para uma firma ou indústria específica, normalmente, tentam encontrar a função de produção Cobb-Douglas que melhor se ajusta aos dados de insumo-produto da firma.

- Para tanto, podemos estimar uma regressão linear por MQO tomando o logaritmo natural da função de produção:
$$\ln q = \ln A + a_1 \ln x_1 + \cdots + a_n \ln x_n.$$

Funções de produção

- Mostre que a função de produção de elasticidade de substituição constante (CES):

$$g(\mathbf{x}) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i^{-\rho}\right)^{-\nu/\rho},$$

  é homogênea de grau ν.

- Restrições sobre os parâmetros: $A > 0$, $\nu > 0$, $\rho > -1$, $\rho \neq 0$, $\delta_i > 0$, $\forall i$, $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$.

Funções de demanda

- Enquanto as funções de produção são funções homogêneas por hipótese, as funções de demanda são homogêneas por natureza (pelo menos se ignorarmos o fenômeno de ilusão monetária).

- Lembre-se que uma função de demanda é a solução do problema primal de maximização de utilidade de um consumidor, ou seja:

$$x = x^d(p_1, \ldots, p_n, I) = \max U(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{s.r.} \quad p_1x_1 + \ldots p_nx_n \leq I.$$

- Note que se multiplicarmos todos os preços e a renda deste consumidor por uma variável positiva t qualquer, sua restrição orçamentária não será alterada.

- Em particular, a cesta de consumo ótima x não seria afetada. Em termos de função demanda:

$$x^d(tp_1, \ldots, tp_n, tI) = x^d(p_1, \ldots, p_n, I).$$

Propriedades de funções homogêneas

Teorema

Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ *uma função homogênea de grau* k, *então, suas derivadas parciais de primeira ordem serão homogêneas de grau* $k - 1$.

Propriedades de funções homogêneas

Teorema (Teorema de Euler)

Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ uma função C^1 homogênea de grau k no $\mathbb{R}^n_+$. Então, para quaisquer $x_1, \ldots, x_n$:

$$x_1 \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} = kf(x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

ou, em notação de gradiente:

$$\mathbf{x} \nabla f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

Exercícios

- Dizemos que uma função é linearmente homogênea se for de grau um.

  1. Dada a função de produção linearmente homogênea $Q = f(K, L)$, o produto médio do trabalho e do capital podem ser expressos como funções da razão capital trabalho apenas.

  2. Dada a função de produção linearmente homogênea $Q = f(K, L)$, os produtos físicos marginais do capital e do trabalho podem ser expressos como funções apenas de $k = \frac{K}{L}$. Mais precisamente, $PMg_K = f'(k)$ e $PMg_L = f(k) - kf'(k)$.

Aplicação econômica do teorema de Euler

- Uma aplicação convencional do teorema de Euler em economia é o de exaustão do produto total de firmas com funções de produção homogêneas.

- Se a função de produção de uma firma é homogênea de grau um, então, pelo teorema de Euler:

$$x_1 \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} = f(\mathbf{x}) = q.$$

- Suponha o critério usual de maximização de lucros de que a firma paga a cada fator de produção x_i a receita de seu produto marginal $p(\partial f / \partial x_i)$, de modo que ela contrata cada fator até o ponto em que sua contribuição para o produto da firma seja igual ao custo de obter uma unidade adicional deste fator.

Aplicação econômica do teorema de Euler

- Então, o pagamento total da firma será:

$$x_1 p \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \cdots + x_n p \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}.$$

- Mas, pelo teorema de Euler, essa expressão é igual a pq, ou seja, o produto total da firma.

- Portanto, a receita de uma firma com retornos constantes de escala é exatamente exaurida com os pagamentos de todos os fatores de produção.

- Dito de outra maneira, o lucro econômico deste tipo de firma é igual a zero.

- Se o grau de homogeneidade fosse maior (menor) que um, então, os pagamentos totais excederiam (seriam menores que) o valor do produto.

Princípio das produtividades marginais decrescentes

- Princípio dos rendimentos físicos (produtividades marginais) decrescentes. Quanto mais se utiliza um fator de produção i, *ceteris paribus*, a contribuição deste fator para o aumento da produção tende a ser cada vez menor, ou seja, o produto físico marginal do fator de produção i é estritamente decrescente com relação à quantidade utilizada deste fator.
- Formalmente:

$$\frac{\partial PM_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} = f_{ii} < 0, \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Princípio das produtividades marginais decrescentes

- Considerando uma função de produção com apenas dois fatores - capital e trabalho - temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial PM_k}{\partial k} &= \frac{\partial^2 f(k,l)}{\partial k^2} = f_{kk} < 0, \\
\frac{\partial PM_l}{\partial l} &= \frac{\partial^2 f(k,l)}{\partial l^2} = f_{ll} < 0.
\end{aligned}
$$

- A hipótese de produtividade marginal decrescente foi originalmente proposta pelo economista do século XIX Thomas Malthus, que temia que o aumento rápido da população resultasse em uma menor produtividade do trabalho.

- Suas predições pessimistas para o futuro da humanidade fizeram com que a economia ficasse conhecida como "ciência sombria".

Princípio das produtividades marginais decrescentes

Figura Thomas Robert Malthus (1766 - 1834). Fonte: Wikipedia.

Princípio das produtividades marginais decrescentes

- Uma análise mais cuidadosa da função de produção sugere que tais predições pessimistas podem não ser corretas.

- Variações na produtividade marginal do trabalho ao longo do tempo dependem não só de como o fator de produção trabalho está crescendo mas, também, de mudanças nos outros insumos (e.g., capital).

- Ou seja, precisamos nos preocupar também com $\partial PM_l / \partial k = f_{lk}$.

- Na maioria dos casos, $f_{lk} > 0$, portanto, a diminuição da produtividade do trabalho à medida que *ambos* l *e* k *aumentam* pode ser uma conclusão precipitada.

- De fato, a produtividade do trabalho parece ter aumentado significativamente desde a época de Malthus, principalmente porque os aumentos nos insumos de capital (combinado a melhorias tecnológicas) compensou o impacto do declínio da produtividade marginal.

Princípio das produtividades marginais decrescentes

- Suponha que nossa função de produção $f(k,l)$, além de satisfazer o princípio das produtividades marginais decrescentes, apresente retornos constantes de escala.

- Portanto, temos que (sem perda de generalidade):

$$
\begin{aligned}
f(tk,tl) &= tf(k,l),\\
\partial^2 f/\partial k^2 &< 0.
\end{aligned}
$$

Princípio das produtividades marginais decrescentes

- Como a função produção é homogênea de grau um, pelo primeiro Teorema que vimos hoje, sua derivada é homogênea de grau zero, ou seja:

$$\frac{\partial f(tk, tl)}{\partial k} = \frac{\partial f(k, l)}{\partial k}.$$

- Aplicando o teorema de Euler a $\partial f / \partial k$, temos:

$$0 \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} = k \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} + l \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k \partial l}.$$

- Portanto:

$$f_{kl} = \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k \partial l} = -\frac{k}{l} \frac{\partial^2 f(k, l)}{\partial k^2} > 0$$

- Essa derivada parcial cruzada positiva significa que o produto marginal de um fator aumenta quando o outro fator aumenta - lei de Wicksell.

Exercícios

- Mostre que as seguintes funções são homogêneas e verifique o teorema de Euler:

1. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$.
2. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_2^2$.
3. $f(x_1, x_2) = x_1$.

Propriedades de funções homogêneas

- Homogeneidade é uma hipótese forte para uma função de produção e, especialmente, para uma função de utilidade.

- Agora iremos considerar as consequências de adotarmos uma função homogênea ao responder as seguintes questões:

  1. O que podemos afirmar acerca dos conjuntos de nível de uma função homogênea?
  2. Quais propriedades analíticas desejáveis uma função homogênea possui?

- A propriedade geométrica básica de uma função homogênea é uma consequência direta da definição de homogeneidade.

- Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função homogênea de grau k.

- O conjunto de nível-α da função f é definido por:

$$L(\alpha) \equiv \{x \in X | f(x) = \alpha\}. \tag{4}$$

Propriedades de funções homogêneas

- Seja x_α um ponto em $L(\alpha)$, e considere o ponto tx_α (com $t > 0$) obtido ao nos movermos ao longo do raio que passa pela origem e por x_α.

- Então, $f(x_\alpha) = \alpha$ e, pela homogeneidade de f, temos que:

$$f(tx_\alpha) = t^k f(x_\alpha) = t^k \alpha.$$

- Portanto, podemos concluir que $tx_\alpha \in L(t^k \alpha)$ se $x_\alpha \in L(\alpha)$.

- De forma análoga, se $y \in L(t^k \alpha)$, então, $(1/t)y$ está sobre o conjunto de nível $L(\alpha)$ pelo mesmo argumento.

- Portanto, os conjuntos de níveis de funções homogêneas são expansões ou contrações radiais uns dos outros - Figura 3.

Propriedades de funções homogêneas

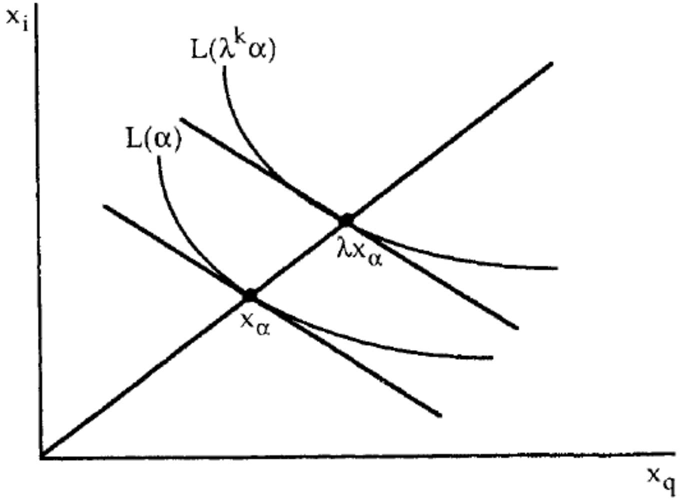

Figura Conjuntos de nível de uma função homogênea. Fonte: De la Fuente (2000).

Propriedades de funções homogêneas

- Uma consequência da observação anterior pode ser enunciada no seguinte teorema:

Teorema

Seja $q = f(\mathbf{x})$ *uma função homogênea de classe* $\mathcal{C}^1$ *no ortante positivo. Os planos tangentes aos conjuntos de nível de* f *possuirão inclinações constantes ao longo de cada raio a partir da origem.*

Propriedades de funções homogêneas

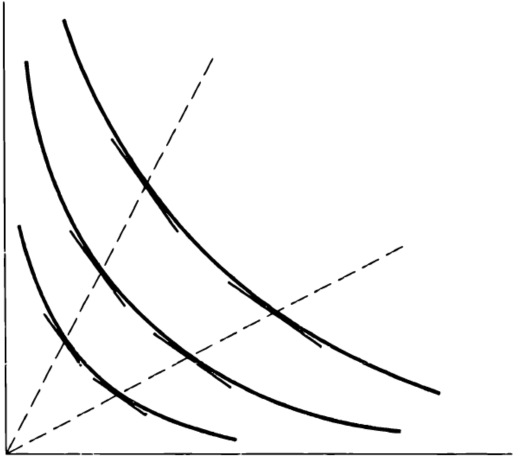

Figura TTS de uma função homogênea é constante ao longo dos raios a partir da origem. Fonte: Simon e Blume (2004).

Propriedades de funções homogêneas

- O Teorema apenas enunciado tem consequências importantes para funções utilidade e de produção.
- Por exemplo, suponha que $U(\mathbf{x})$ seja uma função utilidade homogênea.
- A solução geométrica usual para o problema primal de maximização de utilidade do consumidor prediz que no ponto máximo, a curva de nível de U é tangente à reta orçamentária - Figura 5.
- Analiticamente, no ponto de máximo, a inclinação da curva de nível (ou TMS) é igual à inclinação da reta orçamentária.

Propriedades de funções homogêneas

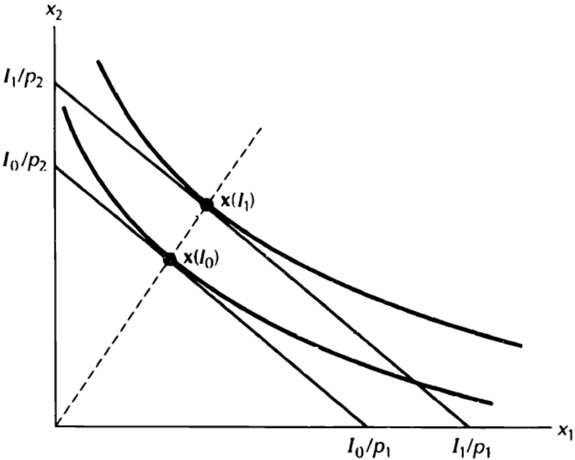

Figura Problema primal de maximização de utilidade. Fonte: Simon e Blume (2004).

Propriedades de funções homogêneas

- Se aumentarmos a renda deste consumidor por um fator r mantendo os preços unitários dos bens constantes, a reta orçamentária será deslocada paralelamente como na Figura 5.
- A inclinação da reta orçamentária permanecerá a mesma.
- A solução para o novo problema de otimização ocorre no ponto em que a TMS é igual à razão entre os preços dos bens.
- Como a função utilidade é homogênea, este ponto será dado pela interseção entre a nova restrição orçamentária e o raio a partir da origem que passa pelo ponto ótimo original $x(I_0)$, pelo teorema que acabamos de ver.
- Portanto, a curva parametrizada $I \to x(I)$ como na Figura 5 indica que a cesta de consumo demandada para diferentes níveis de renda é chamada de trajetória (caminho) de expansão da renda.

Propriedades de funções homogêneas

- Acabamos de mostrar que a trajetória de expansão da renda de uma função utilidade homogênea é um **raio a partir da origem**.
- Esta propriedade de funções homogêneas, implicada pelo teorema enunciado, é conhecida como homoteticidade, que estudaremos posteriormente.

Utilidade ordinal × utilidade cardinal

- Funções homogêneas possuem propriedades que as tornam formas funcionais úteis para funções utilidade e de produção.
- No entanto, o conceito moderno de utilidade é uma teoria ordinal, e não cardinal.
- Homogeneidade, por sua vez, é uma propriedade cardinal, e não ordinal.
- Posteriormente analisaremos uma classe mais ampla de funções que possuem as mesmas propriedades ordinais - funções homotéticas.

Utilidade ordinal × utilidade cardinal

- Uma função utilidade provê uma mensuração do nível de satisfação associado a cada cesta de consumo.
- No entanto, economistas não acreditam que um número real pode ser atribuído a cada cesta de consumo de maneira a expressar (em utils) o nível de satisfação de um consumidor com aquela cesta de consumo.
- Economistas acreditam que consumidores possuem preferências bem comportadas sobre cestas de consumo e que, dadas duas cestas quaisquer, um consumidor pode estabelecer uma relação de preferência binária entre as duas.
- Apesar de trabalharmos com funções utilidade, estamos interessados nos conjuntos de nível de tais funções, e não com o número real que a função utilidade associa a um conjunto de nível qualquer.

Utilidade ordinal × utilidade cardinal

- Na teoria da utilidade, estes conjuntos de nível são denominados conjuntos de indiferença, ou curvas de indiferença quando os conjuntos de nível são curvas.
- Uma propriedade de funções utilidades é chamada ordinal se depende apenas do formato e posição dos conjuntos de indiferença de um consumidor.
- Por outro lado, uma propriedade é denominada cardinal se também depende da quantidade absoluta de utilidade que a função utilidade associa a cada um dos conjuntos de indiferença.
- Neste contexto, duas funções são equivalentes se possuem exatamente os mesmos conjuntos de indiferença, apesar de poderem associar diferentes números reais para um conjunto de indiferença qualquer.

Utilidade ordinal × utilidade cardinal

- Exemplo, seja $u(x, y)$ uma função utilidade em $\mathbb{R}^2_+$. Defina $v(x, y)$ como a função utilidade dada por $u(x, y) + 1$.
- Essas duas funções possuem exatamente as mesmas curvas de indiferença.
- A função v associa um número real que é maior em uma unidade que o número que a função u associa a cada curva de indiferença.
- Por exemplo, a curva de indiferença $\{u = 13\}$ coincide com a curva de indiferença $\{v = 14\}$.
- As funções u e v representam as mesmas preferências e, portanto, são equivalentes.

Utilidade ordinal × utilidade cardinal

- A função utilidade $w(x, y) = [u(x, y)]^2$ também é equivalente a u.
- Se $w(x_1, y_1) = w(x_2, y_2) = a$, então, $u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2) = \sqrt{a}$.
- As funções utilidade u e w possuem as mesmas curvas de indiferença, apenas atribuem diferentes números reais a elas.
- Se $g_1(z) = z + 1$ e $g_2(z) = z^2$, então, podemos escrever $v = g_1 \circ u$ e $w = g_2 \circ u$.
- Dizemos que v e w são transformações monotônicas de u.

Utilidade ordinal × utilidade cardinal

Definição (Transformação monotônica)

Seja I um intervalo sobre a reta real. Então, $g : I \to \mathbb{R}$ é uma transformação monotônica de I se g é uma função estritamente crescente em I. Além disso, se g é uma transformação monotônica e u é uma função real de n variáveis, então, dizemos que:

$$g \circ u : x \mapsto g(u(x))$$

é uma transformação monotônica de u.

- Obviamente, se g é uma função diferenciável, então g será uma transformação monotônica se $g'(x) > 0$ para qualquer $x \in I$.

Utilidade ordinal × utilidade cardinal

- Uma característica de funções é dita ordinal se qualquer transformação monotônica de uma função com esta característica, ainda possui esta característica.
- Propriedades cardinais não são preservadas por transformações monotônicas.
- Observação: em análises de funções de produção, nos preocupamos com o número que a função de produção associa a uma isoquanta qualquer. O nível de produto para cada combinação de insumos possui uma interpretação significativa economicamente.
- Dito de outra forma, a distinção entre cardinal e ordinal não é uma preocupação quando estamos tratando de funções de produção.

Funções homotéticas

- Como acabamos de ver, homogeneidade é uma propriedade cardinal, e não ordinal.
- Exemplos: as funções $g_1(z) = z^3 + z$ e $g_2(z) = z + 1$ são transformações monotônicas, mas a aplicação destas transformações à função homogênea $u(x, y) = xy$ leva a funções que não são homogêneas.
- No entanto, muitas das propriedades que tornam funções homogêneas úteis em teoria da utilidade são propriedades ordinais:

  1. Conjuntos de nível são expansões ou contrações radiais uns dos outros.
  2. A inclinação dos conjuntos de nível é constante ao longo de raios a partir da origem.

- Estas são duas propriedades claramente ordinais: dizem respeito apenas à forma e inclinação das curvas de nível, sem preocupar-se com os números atribuídos a estes conjuntos de nível.

Funções homotéticas

- Definiremos, então, uma classe de funções ordinais - uma classe que possui todas as propriedades ordinais que funções homogêneas possuem.

Definição (Funções homotéticas)

Uma função $v : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dita homotética se é uma transformação monotônica de uma função homogênea.*
Isto é, se existe uma transformação monotônica $z \longmapsto g(z)$ *do* $\mathbb{R}_+$ *e uma função homogênea* $u : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *tal que:*

$$v(\mathbf{x}) = g(u(\mathbf{x})),$$

para todo $\mathbf{x}$ *no domínio da função.*

- Pela definição, percebe-se que homoteticidade é uma propriedade ordinal: uma transformação monotônica de uma função homotética é, também, uma função homotética.

Caracterizando funções homotéticas

- Discutiremos, agora, duas das principais propriedades ordinais de funções homogêneas.
- Veremos que estas propriedades caracterizam funções de utilidade homotéticas.
- A primeira propriedade é que conjuntos de nível são expansões ou contrações radiais uns dos outros.

Funções homotéticas

Definição (Funções monotônicas)

$u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *é uma* *função monotônica* *se* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n_+$:

$$x \geq y \Rightarrow u(x) \geq u(y).$$

A função u *é* *estritamente monotônica* *se* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n_+$:

$$x > y \Rightarrow u(x) > u(y).$$

Funções homotéticas

- Monotonicidade e monotonicidade estrita são propriedades naturais de funções utilidade.

Teorema

Seja $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *uma função estritamente monotônica. Então,* u *é homotética se, e somente se, para todo* x *e* y *em* $\mathbb{R}^n_+$*:*

$$u(x) \geq u(y) \iff u(\alpha x) \geq u(\alpha y), \qquad \forall \alpha > 0. \tag{5}$$

Funções homotéticas

- A segunda propriedade ordinal de homogeneidade é que a inclinação de conjuntos de nível é constante ao longo de raios a partir da origem.
- Esta propriedade fornece uma condição necessária baseada no cálculo para homoteticidade (da mesma forma que o teorema de Euler o faz para homogeneidade).

Teorema

Seja u uma função $\mathcal{C}^1$ sobre $\mathbb{R}^n_+$. Se u é homotética, então, as inclinações dos planos tangentes aos conjuntos de nível de u são constantes ao longo dos raios a partir da origem.
Em outras palavras, para quaisquer i, j e para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}(t\mathbf{x})}{\frac{\partial u}{\partial x_j}(t\mathbf{x})} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{\frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{x})}, \qquad \forall t > 0. \tag{6}$$

Funções homotéticas

- O teorema anterior enuncia que se u é uma função homotética, então, sua taxa marginal de substituição é uma função homogênea de grau zero.
- De fato, a condição enunciada é, também, uma condição suficiente para mostrar que uma dada função é homotética.
- Alguns textos definem uma função homotética caso sua taxa marginal de substituição seja homogênea de grau zero.

Teorema

Seja u uma função $\mathcal{C}^1$ sobre $\mathbb{R}^n_+$. Se a condição 6 é válida para qualquer $x \in \mathbb{R}^n_+$, para todo $t > 0$ e quaisquer i, j, então, u é homotética.

Bibliografia

- CHIANG, A.C.; WAINWRIGHT, K. Matemática para economistas. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006
- DE LA FUENTE, Á. Mathematical methods and models for economists. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000
- NICHOLSON, W.; SNYDER C. Teoria microeconômica: Princípios básicos e aplicações. Cengage Learning Brasil, 2019. Disponível em: app.minhabiblioteca.com.br/books/9788522127030/
- SIMON, C.P.; BLUME, L. Matemática para economistas. Porto Alegre: Bookman, 2004
- SYDSÆTER, K.; HAMMOND, P.J.; STRØM, A.; CARVAJAL, A. Essential mathematics for economic analysis. 5th.ed. Harlow, UK: Pearson Education Limited, 2016